Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen.

Von B. VON KERÉKJÁRTÓ in Szeged (Ungarn).

Zweck der vorliegenden Arbeit ist die linearen Abbildungen, d. h. die allgemeinsten eineindeutigen konformen Abbildungen der Kugelfläche auf sich selbst topologisch zu charakterisieren.

Ein früher von mir bewiesener Satz, von welchem ich in der vorangehenden Arbeit[1]) einen neuen Beweis mitteile, liefert die topologische Bestimmung der parabolischen linearen Abbildungen.

Die hyperbolischen und die loxodromischen Abbildungen sind alle untereinander homöomorph. Wenn T eine beliebige hyperbolische und T' irgend eine hyperbolische oder loxodromische Abbildung bedeutet, so gibt es eine topologische Abbildung S der Kugelfläche auf sich selbst, so daß $T' = S^{-1}TS$ ist. Nehmen wir an, daß T und T' dieselben Fixpunkte $z=0$ und $z=\infty$ haben, und für beide $z=\infty$ der Attraktionspunkt sei; das ist mittels linearer Transformationen zu erreichen. Ist dann erstens

$$T\colon z' = \varrho z \text{ und } T'\colon z' = \varrho e^{i\theta} z \qquad (\varrho > 1),$$

so sei

$$S\colon z' = e^{i\theta \frac{\log|z|}{\log \varrho}} . z;$$

ist zweitens

$$T\colon z' = \varrho z \quad (\varrho > 1) \qquad \text{und} \qquad T'\colon z' = \varrho' z \quad (\varrho' > 1),$$

so sei

$$S\colon z' = |z|^{\frac{\log \varrho'}{\log \varrho}} . e^{i \operatorname{arc} z};$$

in beiden Fällen ergibt sich $T' = S^{-1}TS$.

---

1) B. VON KERÉKJÁRTÓ, Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene, *diese Acta*, **6** (1934), S. 226—234.

Die linearen Abbildungen haben die Eigenschaft, daß die Potenzen der Abbildung in jedem nicht invarianten Punkt (bei elliptischen Abbildungen auch in den Fixpunkten) gleichmäßig stetig sind. Wir formulieren die folgende

Bedingung der Regularität. *Eine topologische Abbildung t der Kugelfläche auf sich selbst heißt regulär im Punkte P, wenn die Potenzen von t in P gleichmäßig stetig sind;* m. a. W. wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine solche positive Zahl δ gibt, daß für einen beliebigen Punkt Q, dessen Abstand von P kleiner als δ ist, die bei t^n entstehenden Bilder der Punkte P und Q einen Abstand kleiner als ε voneinander haben, für $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Die Invarianz der Regularitätsbedingung topologischen Abbildungen gegenüber leuchtet ein. — Wir bemerken, daß die Bedingung mit Hilfe des Umgebungsbegriffes auf die folgende Weise formuliert werden kann. Bedeute P^n den bei der Abbildung t^n entstehenden Bildpunkt von P, und $\{P^n\}$ die Menge der Punkte $P^n (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ein Umgebungssystem $\{U^n\}$ von $\{P^n\}$ wird auf die folgende Weise erklärt. Zu jedem Runkt R der Menge $\{P^n\}$ und ihrer Ableitung ordnen wir eine beliebige Umgebung V_R zu; wir erklären U^n als die Vereinigungsmenge derjenigen Umgebungen V_R, die den Punkt P^n enthalten. Die Abbildung t ist regulär im Punkte P, wenn es zu jedem Umgebungssystem $\{U^n\}$ von $\{P^n\}$ eine solche Umgebung U^* von P angegeben werden kann, daß für jeden in U^* enthaltenen Punkt Q, und für jedes n der bei t^n entstehende Bildpunkt Q^n von Q zu U^n gehört. — Für unsere Betrachtung verwenden wir jedoch die zuerst gegebene Form der Bedingung.

Solche Punkte, für welche die obige Bedingung nicht erfüllt ist, nennen wir *singuläre* Punkte.

Wir beweisen den folgenden

Satz. *Eine topologische Abbildung der Kugelfläche auf sich selbst mit erhaltendem Umlaufssinn ist dann und nur dann einer linearen Abbildung homöomorph, wenn sie abgesehen von höchstens endlich vielen Punkten überall regulär ist.*

Die Abbildung ist einer elliptischen, parabolischen, bzw. hyperbolischen Abbildung homöomorph, jenachdem die Anzahl der singulären Punkte gleich Null, eins, bzw. zwei ist.

§ 1. Elliptische Abbildungen.

1. Sei t eine topologische, den Umlaufssinn erhaltende Abbildung der Kugelfläche auf sich selbst. Nach einem bekannten Satze von BROUWER[2]) hat t wenigstens einen Fixpunkt A. Nehmen wir an, daß A ein regulärer Punkt ist.

Sei ε_1 eine positive Zahl von der Art, daß die ε_1-Umgebung von A keinen singulären Punkt enthält. Bezeichne δ_1 eine positive Zahl, die der Zahl ε_1 laut der Regularitätsbedingung für den Punkt A entspricht; wir werden hierfür die Bezeichnung $\delta_1 = \varphi(\varepsilon_1, A)$ verwenden. Sei ε_2 eine andere positive Zahl, kleiner als δ_1 und bezeichne $\delta_2 = \varphi(\varepsilon_2, A)$. Wenn P einen beliebigen solchen Punkt bedeutet, der im Kreisring $R(\varepsilon_2, \delta_1)$ liegt — (darunter verstehen wir, daß sein Abstand von A zwischen ε_2 und δ_1 liegt) — so befindet sich für jedes n das bei t^n entstehende Bild P^n von P im Kreisring $R(\delta_2, \varepsilon_1)$. Wenn also c eine solche einfache geschlossene Kurve ist, die im Kreisring $R(\varepsilon_2, \delta_1)$ verläuft und die Randkreise desselben voneinander trennt, so liegt, für jedes n, das bei t^n entstehende Bild c^n von c im Kreisring $R(\delta_2, \varepsilon_1)$ und trennt die beiden Randkreise desselben. Unter dem Innern der Kurve c^n wollen wir das von c^n bestimmte, den Punkt A enthaltende Gebiet verstehen.

Die Kreisfläche vom Radius δ_2 um A liegt im Innern jeder Kurve des Systems $\{c^n\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Das von dem System $\{c^n\}$ bestimmte, den Punkt A enthaltende Gebiet bezeichnen wir mit D, seinen Rand mit γ. Weil das System $\{c^n\}$ bei t in sich übergeht, und da ferner A ein Fixpunkt ist, so geht das Gebiet D bei t in sich selbst über, sein Rand γ *ist also ein bei t invariantes Kontinuum.*

2. Wir werden beweisen, daß γ *im Kleinen zusammenhängend ist.*

2. 1 Wenn γ im Punkte P nicht im Kleinen zusammenhängend ist, so gibt es eine positive Zahl ϱ und eine Folge gegen P konvergierender Punkte $P_1, P_2, \ldots$ von γ von der Art, daß jedes Teilkontinuum von γ, welches die Punkte P und P_i enthält, einen Durchmesser größer als 12ϱ hat. Bezeichne $\varkappa_P$, bzw. $\varkappa_{P_i}$ die Menge der Punkte von γ, die mit P bzw. mit P_i durch ein solches Teil-

---

[2]) siehe z. B.: B. VON KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie* (Berlin 1923), S. 193.

kontinuum von γ verbunden werden können, welches keinen Punkt im Äußern des Kreises $C(P, 6\varrho)$ besitzt. [$C(P, 6\varrho)$ soll den Kreis vom Mittelpunkt P und vom Radius 6ϱ bezeichnen.]

Unter den Kontinua $\varkappa_{P_i}$ gibt es unendlich viele verschiedene; sonst wäre nämlich ein Kontinuum $\varkappa_{P_\alpha} = \varkappa_{P_\beta} = \ldots$ mit $\varkappa_P$ identisch, also würde das Kontinuum $\varkappa_P$ vom Durchmesser $\leqq 12\varrho$ beide Punkte P und P_α enthalten, gegen Annahme. Jedes Kontinuum $\varkappa_{P_i}$ hat mindestens einen Punkt Q_i auf dem Kreis $C(P, 6\varrho)$. Die Punkte $Q_1, Q_2, \ldots$ haben wenigstens einen Häufungspunkt Q, der notwendig auf dem Kreis $C(P, 6\varrho)$ liegt. Q ist ein Punkt des Kontinuums $\varkappa_P$, da laut des Schoenflies—Zorettischen Satzes[3]) die Grenzmenge von $\varkappa_{P_1}, \varkappa_{P_2}, \ldots$ ein Kontinuum, also eine Teilmenge von $\varkappa_P$ ist. Wählen wir eine Teilfolge der Punkte Q_i, die auf dem Kreise monoton gegen den Punkt Q konvergiert; wir bezeichnen sie weiter mit denselben Indizes. Von einem gewissen Index ab (welchen wir gleich 1 annehmen dürfen) liegen sämtliche Punkte P_i in der ϱ-Umgebung des Punktes P; die entsprechenden Kontinua $\varkappa_{P_i}$ treffen den Kreis $C(P, \varrho)$. Bezeichnen wir mit λ_{Q_i}, bzw. λ_Q die Menge der Punkte, die mit Q_i, bzw. mit Q durch ein solches Teilkontinuum von γ verbunden werden können, dessen Punkte sämtlich zum abgeschlossenen Kreisring $R(P; \varrho, 6\varrho)$ gehören; λ_{Q_i}, bzw. λ_Q ist ein Teilkontinuum von $\varkappa_{P_i}$, bzw. von $\varkappa_P$.

Für jedes $i > 1$ trennen die Kontinua λ_{Q_1} und λ_{Q_i} im Kreisring $R(P; \varrho, 6\varrho)$ die Kontinua $\lambda_{Q_{i-1}}$ und λ_Q voneinander. Sei b derjenige von den Kontinua λ_{Q_1} und λ_{Q_i} bestimmte Bogen des äußeren Kreises, der den Punkt Q_{i-1} enthält. Sei b_1 ein Bogen des inneren Kreises, dessen Endpunkte und nur diese zu λ_{Q_1} bzw. zu λ_{Q_i} gehören. Das Kontinuum $\lambda_{Q_1} + b_1 + \lambda_{Q_i}$ und der Bogen b haben genau zwei Punkte gemein. Das vom Kontinuum $\lambda_{Q_1} + b_1 + \lambda_{Q_i}$ bestimmte einfach zusammenhängende unbeschränkte Gebiet enthält beide Kontinua $\lambda_{Q_{i-1}}$ und λ_Q; b ist ein Querschnitt dieses Gebietes, welcher die Kontinua $\lambda_{Q_{i-1}}$ und λ_Q voneinander trennt. Also werden im Kreisring die Kontinua $\lambda_{Q_{i-1}}$ und λ_Q voneinander durch die Kontinua λ_{Q_1} und λ_{Q_i} getrennt.

Auf jedem der Kontinua λ_{Q_i} wählen wir einen Punkt S_i, der von P den Abstand 3ϱ hat. Sei S ein Häufungspunkt der Folge

[3]) vgl. B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, S. 38.

S_i, von welchem wir annehmen, daß die Folge gegen S konvergiert. S gehört zu λ_Q und hat von P den Abstand 3ϱ. Von einem gewissen Index ab liegen sämtliche Punkte S_i im Innern des Kreises $C(S, 2\varrho)$. Für jeden solchen Wert von i *werden die Punkte* S *und* S_{i-1} *in der von* $C(S, 2\varrho)$ *berandeten abgeschlossenen Kreisfläche voneinander durch das Kontinuum* λ_{Q_i} *getrennt.*

2.2 Bezeichne ϑ eine beliebig kleine positive Zahl; über ihre Wahl werden wir später (2.5) verfügen, einstweilen nehmen wir nur an, daß sie kleiner als $\varrho/2$ ist.

Für hinreichend großes i haben S_{i-1} und S einen Abstand kleiner als ϑ. Da S_{i-1} und S zum Rand γ des Gebietes D gehören, gibt es in beliebig kleinen, zu λ_{Q_i} fremden Umgebungen dieser Punkte je einen zu D gehörigen Punkt H_1 und H_2. Die Punkte H_1 und H_2, von denen wir annehmen, daß sie voneinander und von S um weniger als ϑ entfernt sind, werden in der von $C(S, 2\varrho)$ berandeten abgeschlossenen Kreisfläche voneinander durch λ_{Q_i} getrennt. Sei w_1 die geradlinige Strecke H_1H_2 und sei w ein in D liegender Weg mit denselben Endpunkten. Wir dürfen annehmen, daß w und w_1 außer den Endpunkten keinen gemeinsamen Punkt haben. Sonst ersetzen wir w durch einen solchen Teil, dessen Endpunkte und nur diese zur Strecke w_1 gehören und durch λ_{Q_i} in der Kreisfläche voneinander getrennt werden; die Strecke w_1 ersetzen wir durch die zwischen den Endpunkten des gewählten Teiles von w liegende Strecke.

2.3 Das einfache Polygon $w+w_1$ zerlegt die Ebene in zwei Gebiete. Es gibt im Innern und im Äußern des Polygons $w+w_1$ wenigstens je einen solchen Punkt G_1, bzw. G_2 von λ_{Q_i}, welche auf dem Kreis $C(S, 2\varrho)$ liegen. Um das einzusehen, setzen wir einen H_1 und H_2 in der von $C(S, 2\varrho)$ berandeten Kreisfläche verbindenden Weg W aus Teilen des Weges w und des Kreises $C(S, 2\varrho)$ zusammen, welcher keinen Punkt im Äußern (bzw. im Innern) des Polygons $w+w_1$ besitzt. Wir dürfen annehmen, daß w nur endlich viele Punkte mit dem Kreis $C(S, 2\varrho)$ gemein hat. Umlaufen wir w vom Punkt H_1 ausgehend bis zum ersten zum Kreis gehörigen Punkt; von da aus umlaufen wir denjenigen Bogen des Kreises, der zum Innern des Polygons gehört, bis zum nächsten zu w gehörigen Punkt; von da aus den im Innern des Kreises liegenden Weg von w bis zum nächsten zum Kreis gehörigen Punkt, usf., bis wir nach H_2 gelangen. Da der Weg W die Punkte H_1 und H_2 in der von

$C(S, 2\varrho)$ berandeten Kreisfläche verbindet, trifft er das Kontinuum λ_{Q_i}; die zu w gehörigen Teile von W sind zu λ_{Q_i} fremd, folglich muß ein zu W gehöriger, also im Innern des Polygons $w+w_1$ liegender Bogen des Kreises $C(S, 2\varrho)$ einen Punkt G_1 von λ_{Q_i} enthalten. Genau so zeigt man, daß $C(S, 2\varrho)$ und λ_{Q_i} einen im Äußern des Polygons $w+w_1$ liegenden gemeinsamen Punkt G_2 besitzen.

2.4 Da G_1 zum Rand γ des durch das System $\{c^n\}$ bestimmten Gebietes D gehört, gibt es zu einer beliebig kleinen Umgebung von G_1 mindestens eine Kurve c^r des Systems $\{c^n\}$, welche einen Punkt in dieser Umgebung besitzt. Insbesondere gibt es also eine Kurve c^r des Systems, die einen im Innern des Polygons $w+w_1$ liegenden und von G_1 um weniger als $\varrho/2$ entfernten Punkt F besitzt. Der Punkt G_2 liegt im Innern der Kurve c^r oder auf c^r. Wenn wir also die Kurve c^r ausgehend vom Punkte F in einer oder in der anderen Richtung beschreiben, muß sie das Innere des Polygons $w+w_1$ verlassen, und da sie den im Innern von D liegenden Weg w nicht treffen kann, trifft sie beide Male die Strecke w_1. Seien M^r und N^r die ersten Schnittpunkte von c^r mit w_1, die man ausgehend von F in einer und in der anderen Richtung auf der Kurve c^r erreicht. Der Abstand der Punkte M^r und N^r ist kleiner als ϑ. Der Bogen von c^r, welcher von M^r und N^r bestimmt wird und den Punkt F enthält, hat einen Durchmesser größer als ϱ. Auch der Durchmesser des anderen Bogens M^rN^r von c^r ist größer als ϱ; wenn wir nämlich einen Punkt von w im Äußern des Polygons $w+w_1$ und im Äußern des Kreises $C(S, 2\varrho)$ mit einem Punkt von $C(A, \varepsilon_1)$ verbinden, muß dieser Weg die Kurve c^r treffen, und da der Bogen M^rFN^r im Innern des Polygons $w+w_1$ liegt, trifft er notwendig den anderen Bogen M^rN^r von c^r.

Die Folgerung, die wir aus der Annahme abgeleitet haben, daß γ nicht im Kleinen zusammenhängend ist, fassen wir in der folgenden Aussage zusammen: *Für eine feste positive Zahl ϱ und für eine beliebig kleine positive Zahl ϑ gibt es eine Kurve c^r des Systems $\{c^n\}$, so daß zwei Punkte M^r und N^r von c^r einen Abstand kleiner als ϑ voneinander haben, und die Durchmesser der beiden durch M^r und N^r bestimmten Bögen von c^r größer als ϱ sind.* Wir werden bald sehen, daß diese Aussage widerspruchsvoll ist.

2.5 Da die Bedingung der Regularität für jeden Punkt der

Kurve c besteht, läßt sich nach einer geläufigen Anwendung des Heine—Borelschen Überdeckungssatzes für die gegebene positive Zahl ϱ eine solche positive Zahl δ bestimmen, daß zwei beliebige Punkte K und L von c, deren Abstand kleiner als δ ist, bei irgend einer Potenz t^r von t in zwei voneinander um weniger als ϱ entfernte Punkte K^r und L^r übergehen.

Zu der Zahl δ bestimmen wir eine solche positive Zahl η, daß wenn K und L zwei beliebige voneinander um weniger als η entfernte Punkte von c sind, einer der durch K und L bestimmten Bögen von c vom Durchmesser kleiner als δ sei.

Schließlich bestimmen wir eine positive Zahl ϑ $(<\varrho/_2)$ von der Art, daß wenn zwei beliebige Punkte K und L von c bei einer Potenz t^r von t in zwei voneinander um weniger als ϑ entfernte Punkte K^r und L^r übergehen, der Abstand der Punkte K und L kleiner als η sei.

2.51 Die Existenz einer positiven Zahl ϑ der genannten Art wird durch die folgende Überlegung nachgewiesen. Nehmen wir im Gegensatz zu unserer Behauptung an, daß es eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$, Punkte K_i und L_i von c, und zugehörige Exponenten r_i von der folgenden Art gibt: für jedes i ist der Abstand $(K_i, L_i) \geqq \eta$ und der Abstand $(K_i^{r_i}, L_i^{r_i}) < \vartheta_i$. Durch wiederholte Auswahl von Teilfolgen erhalten wir eine solche Teilfolge, die wir wieder mit denselben Zeichen bezeichnen, daß die Punkte K_i gegen einen Punkt K von c, die Punkte L_i gegen einen Punkt L von c, und die Punkte $K_i^{r_i}$, sowie auch die Punkte $L_i^{r_i}$ gegen einen in $C(A, \varepsilon_1)$ enthaltenen, also notwendig regulären Punkt H konvergieren; der Abstand der Punkte K und L ist größer oder gleich η. Aus der Regularität von K und L folgt, daß für hinreichend großes i die Abstände (K^{r_i}, H) und (L^{r_i}, H) beliebig klein sind; der Abstand (K, K_i) ist nämlich beliebig klein, also auch der Abstand $(K^{r_i}, K_i^{r_i})$; weil ferner der Abstand $(K_i^{r_i}, H)$ für hinreichend großes i beliebig klein ist, so ist auch der Abstand (K^{r_i}, H), ebenso auch (L^{r_i}, H) beliebig klein. Aus der Regularität des Punktes H folgt ferner, daß für hinreichend großes i, mit dem Abstand der Punkte K^{r_i} und H auch der Abstand ihrer bei t^{-r_i} entstehenden Bilder, d. h. der Punkte K und H^{-r_i} beliebig klein, also insbesondere kleiner als $\eta/_2$ ist; Analoges gilt für L und H^{-r_i}. Daraus folgt, daß der Abstand $(K, L) \leqq (K, H^{-r_i}) + (H^{-r_i}, L) < \eta$ ist; das ist ein Widerspruch.

2. 6 Bestimmen wir ϑ auf die in 2. 5 vorgeschriebene Weise; zurückkehrend auf die Aussage von 2. 4 ersehen wir, daß der Abstand der Punkte M^r und N^r kleiner als ϑ, also der Abstand ihrer bei t^{-r} entstehenden, zu c gehörigen Bildpunkte M und N kleiner als η ist; daraus folgt, laut der Bestimmung von η (2. 5), daß einer der Bögen MN von c einen Durchmesser kleiner als δ hat; endlich ergibt sich laut der Bestimmung von δ (2. 5), daß der Durchmesser eines Bogens M^rN^r von c^r kleiner als ϱ ist. Das steht in Widerspruch zu der Aussage von 2. 4.

Somit haben wir bewiesen, daß γ im Kleinen zusammenhängend ist. Nach dem Hahn—Mazurkiewiczschen Satz folgt daraus, daß γ *eine stetige Kurve ist,* also, daß sie sich als eindeutiges stetiges Bild des Intervalles $0 \leqq x \leqq 1$ darstellen läßt.[4])

3. Wir beweisen zunächst, daß γ *auf der Kugel zwei Gebiete bestimmt.* Bezeichnen wir mit D_1 das von γ bestimmte Gebiet, welches das Äußere des Kreises $C(A, \varepsilon_1)$ enthält; wir nennen D_1 das Äußere von γ.

Sei R ein beliebiger Punkt, welcher weder zu γ noch zu D_1 gehört. Legen wir durch R einen einfachen Bogen PRQ, dessen Endpunkte P und Q zu γ gehören, und der keinen anderen Punkt auf γ besitzt.

Nach dem Schoenfliesschen Satz über ebene stetige Kurven ist jeder Punkt der Kurve γ allseitig erreichbar in jedem der durch γ bestimmten Gebiete.[4]) Verbinden wir also die Punkte P und Q durch einen in D verlaufenden einfachen Bogen. Trifft dieser Bogen den Bogen PRQ außer den Endpunkten, so gehört R zum Gebiet D. Wenn aber die beiden Bögen außer P und Q keinen Punkt gemeinsam haben, so bilden sie zusammen eine einfache geschlossene Kurve j, deren Punkte abgesehen von P und Q im Innern jeder Kurve des Systems $\{c^n\}$ liegen; auch das Innere der Kurve j gehört also zum Innern jeder Kurve des Systems $\{c^n\}$, also auch zum Gebiet D; auch in diesem Fall liegt also der Punkt R in D. Das Gebiet D nennen wir das Innere von γ.

Der Rand des Äußern von γ ist mit γ identisch. In beliebi-

[4]) Für einen einfachen Beweis des Hahn—Mazurkiewiczschen Satzes, sowie des unten angeführten Schoenfliesschen Satzes, vgl. B. von Kerékjártó, Über stetige Kurven, *Abhandlungen Math. Seminar Hamburg,* 4 (1925), S. 164—171.

ger Nähe irgend eines. Punktes von γ gibt es einen solchen Punkt, welcher zu einer Kurve c^r des Systems $\{c^n\}$ gehört; folglich gibt es in jeder Umgebung eines beliebigen Punktes von γ einen zum Äußern von c^r, also zu D_1 gehörigen Punkt.

Jeder Punkt von γ ist erreichbar im Innern und im Äußern von γ, nach dem zitierten Satz von SCHOENFLIES. Laut der *Schoenfliesschen Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes*[5]) ist also γ *eine einfache geschlossene Kurve.*

Sie ist bei t invariant und da ihr Inneres den Fixpunkt A enthält, wird also *die einfache geschlossene Kurve γ durch t mit erhaltendem Umlaufssinn auf sich selbst abgebildet.*

4. Wir untersuchen jetzt die von t erzeugte Abbildung einer aus regulären Punkten bestehenden einfachen geschlossenen Kurve γ, die von t mit erhaltendem Umlaufssinn auf sich selbst abgebildet wird.

4.1 *Wenn t auf γ einen Fixpunkt hat, so ist t auf γ die Identität.* Sonst sei λ ein von den Fixpunkten bestimmter Bogen von γ; die Endpunkte R und Q von λ (die auf γ zusammenfallen dürfen) sind invariant bei t, aber jeder innere Punkt P von λ geht in einen von ihm verschiedenen Punkt P^1 über. Die sukzessiven Bilder $P, P^1, P^2, \ldots$ eines beliebigen inneren Punktes P von λ konvergieren gegen einen Endpunkt R von λ; die invers sukzessiven Bilder $P^{-1}, P^{-2}, \ldots$ konvergieren gegen den anderen Endpunkt Q. Die beiden Endpunkte R und Q von λ sind singuläre Punkte von t, denn offenbar ist für diese Punkte die Bedingung der Regularität nicht erfüllt.

4.11 *Wenn t auf γ einen Fixpunkt hat, so ist t auf der ganzen Kugel die Identität.* Um einen beliebigen Punkt P von γ legen wir einen hinreichend kleinen Kreis c_1, der keinen singulären Punkt enthält, und konstruieren wir aus seinen sukzessiven Bildern eine invariante Kurve γ_1. Diese schneidet die Kurve γ, hat also mindestens einen invarianten Punkt; laut 4.1 sind dann alle Punkte von γ_1 invariant. Lassen wir den Radius von c_1 bis Null abnehmen; die den verschiedenen Kreisen c_1 entsprechenden invarianten Kurven γ_1 bedecken eine Umgebung von P überall dicht.[6]) Weil die Menge der Fixpunkte abgeschlossen ist, folgt daraus, daß die Abbildung t in einer vollen Umgebung eines

[5]) vgl. B. VON KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie,* S. 79.

[6]) vgl. die unter 5. gegebenen Betrachtungen.

beliebigen Punktes von γ die Identität ist. Nach dem Bewiesenen bildet die mit γ zusammenhängende Teilmenge der Fixpunktmenge von t eine offene Menge; da sie aber zugleich auch abgeschlossen ist, ist sie mit der ganzen Kugel identisch.

4.2 *Wenn t^n einen Punkt von γ in sich selbst überführt, so ist t eine n-periodische Abbildung der Kugelfläche auf sich selbst; sie ist also einer Drehung der Kugel um $\frac{2k\pi}{n}$ homöomorph* (k, n ganz).[7]

Wenden wir nämlich die Resultate 4.1 und 4.11 auf die Abbildung t^n an, die auf γ ebenfalls regulär ist.

4.3 *Wenn keine Potenz von t einen Fixpunkt auf γ besitzt, so ist die von t erzeugte Abbildung von γ auf sich der Drehung eines Kreises um $2\pi\alpha$ homöomorph, wo α eine irrationale Zahl bedeutet.*

Sei 2ε eine beliebig kleine positive Zahl, die kleiner ist, als der Durchmesser von γ. Sei $\eta > 0$ so gewählt, daß wenn M und N zwei beliebige, voneinander um weniger als η entfernte Punkte von γ sind, einer der durch M und N bestimmten Bögen von γ vom Durchmesser kleiner als ε sei; der andere Bogen MN von γ hat einen Durchmesser größer als ε. Sei schließlich $\delta > 0$ so gewählt, daß wenn zwei beliebige Punkte M und N von γ voneinander um weniger als δ entfernt sind, ihre bei t^n entstehenden Bilder M^n und N^n einen Abstand $< \eta$ voneinander haben.

Wenn P einen beliebigen Punkt von γ bedeutet, so sind seine sukzessiven Bilder $P^1, P^2, \ldots$ zufolge unserer Voraussetzung alle voneinander verschieden; sie haben mindestens einen Häufungspunkt Q. Es gibt also zwei Punkte P^k und P^l der Folge, die voneinander um weniger als δ entfernt sind. Für jedes n sind P^{k+n} und P^{l+n} um weniger als η voneinander entfernt, so daß einer der durch sie bestimmten Bögen von γ einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat. Sei etwa $k < l$, und $l - k = \nu$. Je zwei aufeinander folgende Punkte der Folge $P, P^\nu, P^{2\nu}, \ldots$, sind um weniger als η voneinander entfernt. Unter dem Bogen $P^{r\nu}P^{(r+1)\nu}$ verstehen wir denjenigen durch diese Punkte bestimmten Bogen von γ, dessen Durchmesser kleiner als ε ist. Der Bogen $P^{r\nu}P^{(r+1)\nu}$ hat mit dem Bogen $P^{(r+1)\nu}P^{(r+2)\nu}$ außer $P^{(r+1)\nu}$ keinen Punkt gemein. In der

[7]) vgl. B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, S. 223—224.

Folge $P, P^{\nu}, P^{2\nu}, \ldots$ gibt es einen Punkt $P^{r\nu}$ mit kleinstem Index $r\nu\,(>0)$, für welchen der Bogen $P^{r\nu}P^{(r+1)\nu}$ mit dem Bogen PP^{ν} einen Punkt gemein hat. Die Punkte $P, P^{\nu}, P^{2\nu}, \ldots, P^{r\nu}$ bedecken die Kurve ε-dicht: jeder Bogen von γ vom Durchmesser $>\varepsilon$ enthält mindestens einen der Punkte $P, P^{\nu}, \ldots, P^{r\nu}$. Da ε beliebig klein ist, folgt daraus, daß *die sukzessiven Bilder eines beliebigen Punktes von γ auf der Kurve γ überall dicht liegen.*

Wir bezeichnen als Bogen (PP^1) denjenigen durch P und P^1 bestimmten Bogen von γ, welcher den Punkt P^2 nicht enthält; sein bei t^n entstehendes Bild bezeichnen wir mit (P^nP^{n+1}). Unter dem Bogen (PP^n) verstehen wir die Summe der Bögen $(PP^1)+(P^1P^2)+\ldots+(P^{n-1}P^n)$; diese Bögen nennen wir die Komponenten von (PP^n). Wir sagen, daß *der Bogen (PP^n) die Kurve γ q-mal umkreist,* wenn (PP^n) genau q solche Komponenten hat, die P als inneren Punkt enthalten.

Die Zahl q ist von der Wahl des Punktes P unabhängig. Wäre nämlich Q ein Punkt von γ, für welchen der Bogen (QQ^n) die Kurve γ etwa $q-s$-mal $(s>0)$ umkreisen würde, so lassen wir einen veränderlichen Punkt R auf einem Bogen PQ der Kurve γ stetig von P bis Q laufen; da der Punkt R^n und also auch der Bogen (RR^n) sich mit R stetig ändert, gibt es einen Punkt R auf dem Bogen PQ, für welchen R mit R^n zusammenfällt; das ist ein Widerspruch gegen unsere Annahme.

Die durch die Zahl n eindeutig bestimmte nicht-negative Zahl q bezeichnen wir mit $f(n)$. Die Zahlfolge $\frac{f(1)}{1}, \frac{f(2)}{2}, \frac{f(3)}{3}, \ldots$ konvergiert gegen eine irrationale Zahl α, welche die zu γ gehörige *Rotationszahl* genannt wird. Die Abbildung von γ auf sich ist der Drehung eines Kreises um $2\pi\alpha$ homöomorph.[8])

5. Bezeichnen wir mit (c) die Schar der konzentrischen Kreise um den regulären Fixpunkt A. Sei ε eine solche positive Zahl, daß die Kreisfläche um A vom Radius ε keinen singulären Punkt

[8]) Die Definition der Rotationszahlen rührt von Poincaré her; eine einfache Betrachtung davon gibt H. Kneser, Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, *Math. Annalen,* **91** (1924), S. 135—154., vgl. insbesondere S. 141—144. Siehe ferner G. D. Birkhoff, Surface transformations and their dynamical applications, *Acta Mathematica,* **43** (1920), S. 1—119; insbesondere S. 87—88.

enthält; sei $\delta = \varphi(\varepsilon, A)$. Zu jedem Kreis c, dessen Radius kleiner als δ ist, ordnen wir mittels der in 1 gegebenen Konstruktion eine bei t invariante einfache geschlossene Kurve γ zu; so erhalten wir eine Schar (γ).

Seien c und c_1 zwei Kreise der Schar (c), c_1 im Innern von c; seien γ und γ_1 die ihnen entsprechenden invarianten Kurven. Offenbar hat γ_1 keinen Punkt im Äußern von γ. Sei ϱ eine beliebig kleine positive Zahl; es läßt sich $\eta > 0$ so bestimmen, daß *wenn die Differenz der Radien von c und c_1 kleiner als η ist, jeder Punkt der Kurve γ_1 von der Kurve γ um weniger als ϱ entfernt ist.* Sei nämlich $\eta > 0$ eine solche Zahl, daß für einen beliebigen Punkt Q, der von irgend einem Punkt P von c einen Abstand $< \eta$ hat, die bei t^n entstehenden Bilder P^n und Q^n einen Abstand $< \varrho/2$ voneinander haben. Wenn die Differenz der Radien von c und c_1 kleiner als η ist, läßt sich eine topologische Beziehung zwischen den Punkten von c und c_1 derart angeben, daß je zwei einander entsprechende Punkte einen Abstand $< \eta$ haben; der Parameterabstand der Kreise c und c_1 ist also kleiner als η. Nach der Bestimmung von η folgt daraus, daß für jedes n der Parameterabstand der Kurven c^n und c_1^n kleiner als $\varrho/2$ ist. Sei Q_1 ein beliebiger Punkt von γ_1; in der $\varrho/4$-Umgebung von Q_1 gibt es einen Punkt P_1^r, der zu einer Kurve c_1^r des Systems $\{c_1^n\}$ gehört; es gibt dann einen Punkt P^r auf der Kurve c^r im Abstand $< \varrho/2$ von P_1^r; in der $\varrho/4$-Umgebung von P^r gibt es einen zum Äußern von c^r, also zum Äußern von γ gehörigen Punkt R. Der Abstand (Q_1, R) ist kleiner als ϱ; auf der Strecke Q_1R gibt es mindestens einen Punkt der Kurve γ.

Wenn c in einer sehr kleinen Umgebung von A enthalten ist, so liegt γ in derselben Umgebung von A, da die Punkte von γ zum Innern von c oder zu c gehören. Aus dem Bewiesenen folgt also, daß *die Schar (γ) eine Umgebung von A überall dicht bedeckt.*

5. 1 Sei γ_0 eine aus regulären Punkten bestehende einfache geschlossene Kurve, welche von t mit erhaltendem Umlaufssinn auf sich selbst abgebildet wird. Sei ε eine solche positive Zahl, daß alle Punkte der Kugel, deren Abstand von γ_0 nicht größer als ε ist, reguläre Punkte sind. Sei δ eine der Zahl ε laut der Regularitätsbedingung für die Kurve γ_0 entsprechende positive Zahl. Wenn c eine die Kurve γ_0 nicht treffende einfache geschlossene

Kurve ist, deren Punkte sämtlich im Abstand $<\delta$ von γ_0 liegen, so hat jeder Punkt von c^n einen Abstand $<\varepsilon$ von γ_0. Das System $\{c^n\}$ bestimmt ein die Kurve γ_0 enthaltendes invariantes Gebiet, dessen Rand nach den Betrachtungen von 1—3 eine bei t invariante einfache geschlossene Kurve γ ist.

Nehmen wir eine Schar (c) von einfachen geschlossenen Kurven c, die einander nicht treffen und in der δ-Umgebung von γ_0 verlaufen; γ_0 soll auch zur Schar gehören und (c) soll eine Umgebung von γ_0 überall dicht bedecken. Wir konstruieren zu jeder Kurve c der Schar (c) die zugehörige invariante Kurve γ; diese bilden eine Schar (γ), die in einer Umgebung von γ_0 überall dicht liegt.

Von der invarianten Kurve γ_0 ausgehend haben wir auf diese Weise eine sich nach beiden Seiten von γ_0 erstreckende Schar (γ) von invarianten Kurven konstruiert. Von den beiden äußeren Kurven der Schar (γ) ausgehend konstruieren wir weitere Scharen von invarianten Kurven, usw. Die Fortsetzung der Konstruktion kann nur dadurch gehemmt werden, daß die nacheinander konstruierten invarianten Kurven sich auf einen regulären Fixpunkt zusammenziehen, oder aber einem singulären Punkt nähern. (Weiteres darüber folgt in 8)

6. Von den in 5 konstruierten Scharen invarianter Kurven werden wir beweisen, daß *die zu den verschiedenen Kurven der Schar gehörigen Rotationszahlen einander gleich sind.* Wir beschränken uns auf den Fall, daß kein Punkt irgend einer Kurve γ bei einer Potenz t^n von t invariant ist; der andere Fall wurde unter 4. 2 bereits erledigt.

Sei γ eine beliebige Kurve der Schar. Zwecks einfacheren Ausdrucks setzen wir voraus, daß γ auf einer Halbkugel liegt, und verstehen wir unter dem Inneren von γ dasjenige durch γ bestimmte Gebiet, welches auf derselben Halbkugel liegt.

6. 1 Wir stellen γ als einen Kreis dar und schlagen um seinen Mittelpunkt O einen Kreis $C(O, 2\varepsilon)$ vom Radius 2ε, welcher im Innern von γ liegt. Sei P ein beliebiger Punkt von γ und sei $\delta = \varphi(\varepsilon, P)$. Sei γ_1 eine andere Kurve der Schar im Zwischengebiet von γ und $C(O, 2\varepsilon)$, die einen von P um weniger als δ entfernten Punkt P_1 besitzt. Für jedes n ist der Abstand $(P^n, P_1^n) < \varepsilon$.

Bestimmen wir eine solche positive Zahl ϑ, daß wenn zwei Punkte Q und R von γ (oder zwei Punkte Q_1 und R_1 von γ_1)

einen Abstand $<\vartheta$ haben, die bei t^n entstehenden Bilder Q^n und R^n (bzw. Q_1^n und R_1^n) so wenig voneinander entfernt sind, daß ein durch diese Punkte bestimmter Bogen von γ (bzw. von γ_1) vom Durchmesser $<\varepsilon$ ist.

6.2 Da die Punkte $P^1, P^2, \ldots$ auf γ überall dicht liegen, gibt es eine zunehmende Folge von ganzen Zahlen $0 < n_1 < n_2 < \ldots$, für welche die Punkte $P^{n_1}, P^{n_2}, \ldots$ gegen P konvergieren. Die mit denselben Exponenten gebildeten Punkte $P_1^{n_1}, P_1^{n_2}, \ldots$ von γ_1 haben mindestens einen Häufungspunkt Q. Es gibt also zwei Zahlen n_k und n_l von der Eigenschaft, daß die Punkte P^{n_k} und P^{n_l} voneinander um weniger als ϑ entfernt sind, ebenso auch die Punkte $P_1^{n_k}$ und $P_1^{n_l}$. Bezeichnen wir $n_k - n_l$ mit ν; aus der Bestimmung der Zahl ϑ ergibt sich, daß je zwei aufeinander folgende Punkte der Folge $P, P^\nu, P^{2\nu}, \ldots$, oder der Folge $P_1, P_1^\nu, P_1^{2\nu}, \ldots$ einen Bogen vom Durchmesser $<\varepsilon$ auf γ, bzw. auf γ_1 bestimmen.

6.3 Wenn die Rotationszahlen von γ und γ_1 für t^ν verschieden sind, so gibt es eine Zahl μ, für welche $P_1^{(\mu+1)\nu}$ auf dem Bogen $P_1P_1^\nu$ liegt, der Bogen

$$PP^\nu + P^\nu P^{2\nu} + \ldots + P^{\mu\nu} P^{(\mu+1)\nu}$$

die Kurve γ q-mal ($q > 2$), und der Bogen

$$P_1P_1^\nu + P_1^\nu P_1^{2\nu} + \ldots + P_1^{\mu\nu} P_1^{(\mu+1)\nu}$$

die Kurve γ_1 q_1-mal umkreist, wobei die Differenz der nichtnegativen ganzen Zahlen q und q_1 absolut größer als 2 ist. Wenn γ_1 den Kreis $C(O, 2\varepsilon)$ in ihrem Innern enthält, so setzen wir $q' = q_1$ bzw. $q' = -q_1$, jenachdem die Bögen PP^ν und $P_1P_1^\nu$ auf den Kurven γ und γ_1 in bezug auf den Kreis $C(O, 2\varepsilon)$ denselben Umlaufssinn bestimmen, oder nicht; wenn das Innere von γ_1 den Kreis $C(O, 2\varepsilon)$ nicht enthält, setzen wir $q' = 0$.

Stellen wir irgend eine topologische Beziehung zwischen den Punkten von PP^ν und $P_1P_1^\nu$ her, bei welcher P und P_1 einander entsprechen, ebenso P^ν und P_1^ν. Diese Beziehung übertragen wir auf die Bögen $P^{r\nu}P^{(r+1)\nu}$ und $P_1^{r\nu}P_1^{(r+1)\nu}$ mittels der Abbildung $t^{r\nu}$. Lassen wir einen veränderlichen Punkt M der Reihe nach die Bögen $PP^\nu, P^\nu P^{2\nu}, \ldots, P^{\mu\nu}P^{(\mu+1)\nu}$ umlaufen; der Arcus des Punktes M in bezug auf den Punkt O ändert sich dabei von 0 bis zu einem zwischen $2\pi q$ und $2\pi(q+1)$ liegenden Endwert. Der dem Punkt M entsprechende Punkt M_1 umläuft die Bögen

$P_1 P_1^{\nu}, P_1^{\nu} P_1^{2\nu}, \ldots, P_1^{\mu\nu} P_1^{(\mu+1)\nu}$, sein Arcus ändert sich von 0 bis zu einem zwischen $\pi(2q'-1)$ und $\pi(2q'+1)$ liegenden Endwert. Da $|q'-q|>2$ ist, so ist der Unterschied der Endwerte größer als 2π, es gibt also einen Punkt M, für welchen der Arcusunterschied von M und M_1 gleich π ist. Diese Punkte M und M_1 sind um mehr als 4ε voneinander entfernt, denn zwischen ihnen liegt der Kreis $C(O, 2\varepsilon)$. Sei $P^{r\nu} P^{(r+1)\nu}$ derjenige Bogen, zu welchem der Punkt M gehört, so ist $(M, P^{r\nu})<\varepsilon$; der entsprechende Punkt M_1 gehört zum Bogen $P_1^{r\nu} P_1^{(r+1)\nu}$, es ist also $(M_1, P_1^{r\nu})<\varepsilon$. Nach 6.1 ist auch $(P^{r\nu}, P_1^{r\nu})<\varepsilon$; daraus folgt $(M, M_1)<3\varepsilon$, was ein Widerspruch ist.

Somit haben wir gezeigt, daß die Rotationszahlen von γ und γ_1 für t^{ν} einander gleich sind. Die Rotationszahlen für t ergeben sich aus diesen durch Division mit ν. Es folgt, daß die Rotationszahlen von zwei benachbarten Kurven der Schar (γ), und also auch von allen Kurven der Schar (γ) einander gleich sind.

7. *Wenn der Abstand von zwei Kurven der* (unter 5 konstruierten) *Schar* (γ) *hinreichend klein ist, so ist ihr Parameterabstand beliebig klein.*

Sei γ eine Kurve der Schar (γ), und sei ε eine beliebig kleine positive Zahl. Bestimmen wir $\delta>0$ laut der Regularität zur Zahl ε für einen Punkt P der Kurve γ. Sei γ_1 eine andere Kurve der Schar, die einen von P um weniger als δ entfernten Punkt P_1 besitzt. Wir erklären eine Abbildung von γ auf γ_1 auf die folgende Weise. Für jedes n lassen wir dem Punkt P^n von γ den Punkt P_1^n von γ_1 entsprechen; der Abstand der Punkte P^n und P_1^n ist kleiner als ε. Da die Rotationszahlen von γ und γ_1 gleich sind, haben die Mengen $\{P^n\}$ und $\{P_1^n\}$ auf den Kurven γ, bzw. γ_1 dieselbe zyklische Ordnung; $\{P^n\}$, bzw. $\{P_1^n\}$ ist überall dicht auf γ, bzw. auf γ_1. Wir ergänzen die zwischen ihnen erklärte Beziehung für die ganze Kurve γ und γ_1, indem wir einem beliebigen Punkt Q von γ denjenigen Punkt Q_1 von γ_1 zuordnen, der in bezug auf die Punkte P_1^n dieselben Ordnungsrelationen hat, wie Q in bezug auf die Punkte P^n.[9]) Auf diese Weise entsteht eine topologische Beziehung zwischen den Punkten von γ und γ_1, wobei je zwei einander entsprechende Punkte im Abstand $\leqq\varepsilon$ voneinander liegen.

---

[9]) vgl. B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, S. 40.

7. 1 Aus der in 7 bewiesenen Eigenschaft der Schar (γ) folgt, daß *die Schar* (γ) *einer Schar von konzentrischen Kreisen homöomorph ist.*[10])

8. Wenn die Abbildung t keinen singulären Punkt hat, so führt die in 5 gegebene Konstruktion zu einer Schar von invarianten Kurven, die die Kugelfläche bedeckt und sich auf zwei reguläre Fixpunkte A und B zusammenzieht. Die Schar läßt sich nach dem eben zitierten Satz auf die Schar der Parallelkreise einer Kugel topologisch abbilden. Vermittels dieser Abbildung geht die gegebene Abbildung t der Kugel auf sich in eine Drehung der Kugel um $2\pi\alpha$ über, wo α die in 4. 3 definierte Rotationszahl bedeutet. Dieses Resultat fassen wir mit dem in 4. 2 Bewiesenen zusammen, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

I. *Eine topologische Abbildung der Kugel auf sich mit erhaltendem Umlaufssinn, die keinen singulären Punkt hat, ist einer elliptischen linearen Transformation homöomorph.*

8. 1 Betrachten wir eine solche Abbildung t, die höchstens endlich viele singuläre Punkte hat. Die in 5 gegebene Konstruktion von Scharen invarianter Kurven läßt sich in beliebige Nähe eines singulären Punktes S fortsetzen. Wenn für eine beliebig kleine positive Zahl ε eine invariante Kurve γ ganz in der ε-Umgebung von S verlaufen würde, so wäre S kein singulärer Punkt. Wir setzen also voraus, daß es invariante Kurven γ gibt, deren Abstände vom singulären Punkt S beliebig klein sind, aber jede Kurve γ einen Punkt außerhalb der ε-Umgebung von S hat, wobei ε eine feste positive Zahl bedeutet. Wir setzen von den Kurven γ immer voraus, daß kein Punkt von γ bei irgend einer Potenz t^n von t invariant ist.

Sei $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine Folge von Kurven der Schar, auf welchen liegende Punkte $P_1, P_2, \ldots$ gegen den singulären Punkt S konvergieren; seien $Q_1, Q_2, \ldots$ Punkte derselben Kurven, die gegen einen solchen regulären Punkt Q^* konvergieren, dessen Abstand von S größer oder gleich ε ist.

8. 11 Wir bezeichnen mit ϱ eine positive Zahl, die kleiner ist als $\varepsilon/4$. Sei $\delta > 0$ eine Zahl, die der Zahl $\varrho/2$ für den Punkt Q^* laut der Regularitätsbedingung entspricht. Von einem gewissen Index i ab, welchen wir gleich 1 annehmen dürfen, liegen die Punkte Q_i in der $\delta/2$-Umgebung von Q^*. Der Abstand der Punkte

[10]) B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie,* S. 241—246.

(Q_1, Q_i) ist kleiner als δ, für $i = 2, 3, \ldots$ Ordnen wir für jedes n die Punkte Q_1^n und Q_i^n der Kurven γ_1 und γ_i einander zu, und erweitern diese Zuordnung zu einer topologischen Beziehung zwischen allen Punkten von γ_1 und γ_i; je zwei entsprechende Punkte der beiden Kurven haben einen Abstand $\leqq \varrho$ voneinander.

8. 12 Da die singulären Punkte bei t ineinander übergehen, gibt es einen Exponenten ν_1, für welchen t^{ν_1} jeden der singulären Punkte in sich überführt. Sei $\nu > 0$ der kleinste Exponent, für welchen t^ν den singulären Punkt S invariant läßt. Die bei den Abbildungen $t^{n\nu}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ entstehenden Bilder von Q_1 liegen auf γ_1 überall dicht; es gibt einen Index $\mu = k\nu$, für welchen Q_1^μ so nahe bei Q_1 liegt, daß einer der durch Q_1 und Q_1^μ bestimmten Bögen von γ_1 ganz in der ϱ-Umgebung von Q^* liegt. Die Punkte des Bogens $Q_i Q_i^\mu$ von γ_i $(i \geqq 2$, beliebig) sind von den entsprechenden Punkten des Bogens $Q_1 Q_1^\mu$ um nicht mehr als ϱ entfernt; der Bogen $Q_i Q_i^\mu$ von γ_i liegt also in der 2ϱ-Umgebung von Q^*. Es gibt eine Zahl N, für welche der Bogen $Q_1 Q_1^\mu + Q_1^\mu Q_1^{2\mu} + \ldots + Q_1^{N\mu} Q_1^{(N+1)\mu}$ die Kurve γ_1 genau einmal umkreist, und der Punkt $Q_1^{(N+1)\mu}$ auf dem Bogen $Q_1 Q_1^\mu$ liegt. Da die Rotationszahlen von γ_1 und γ_i gleich sind, so gilt für jeden Index i die analoge Behauptung, nämlich, daß der Bogen $Q_i Q_i^\mu + Q_i^\mu Q_i^{2\mu} + \ldots + Q_i^{N\mu} Q_i^{(N+1)\mu}$ die Kurve γ_i genau einmal umkreist und der Punkt $Q_i^{(N+1)\mu}$ auf dem Bogen $Q_i Q_i^\mu$ liegt. Einer der Bögen $Q_i^{r\mu} Q_i^{(r+1)\mu}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, N)$ enthält den Punkt P_i; *der Punkt P_i geht bei einer der Abbildungen $1, t^{-\mu}, t^{-2\mu}, \ldots, t^{-N\mu}$ in einen von Q^* um weniger als 2ϱ entfernten Punkt über,* nämlich in einen Punkt des Bogens $Q_i Q_i^\mu$.

8. 13 Sei andererseits $\vartheta > 0$ eine solche positive Zahl, daß jeder Punkt R, dessen Abstand von S kleiner als ϑ ist, bei jeder der *endlichvielen* Abbildungen $1, t^{-\mu}, t^{-2\mu}, \ldots, t^{-N\mu}$, die sämtlich den Punkt S invariant lassen, in solche Punkte übergeht, die in der ϱ-Umgebung von S enthalten sind. Wenn i hinreichend groß ist, so gehört der Punkt P_i zu der ϑ-Umgebung von S; *die bei den Abbildungen $1, t^{-\mu}, t^{-2\mu}, \ldots, t^{-N\mu}$ entstehenden Bilder von P_i gehören also zu der ϱ-Umgebung von S.* Da der Abstand der Punkte Q^* und S größer als 4ϱ ist, steht dieses Ergebnis mit dem am Schluß von 8. 12 erhaltenen Resultat in Widerspruch.

Es stellte sich heraus, daß die Voraussetzung einer aus regulären Punkten bestehenden invarianten Kurve mit der Voraussetzung eines singulären Punktes unverträglich ist. Dieses Ergebnis sprechen wir im folgenden Satz aus:

8. 2 *Wenn eine topologische Abbildung t der Kugel auf sich mit erhaltendem Umlaufssinn und mit höchstens endlich vielen singulären Punkten einen regulären Punkt, oder eine aus regulären Punkten bestehende einfache geschlossene Kurve invariant läßt, so ist t überall regulär.*

Dieser Satz wird als Hilfssatz für die weiteren Betrachtungen angewendet. — Zunächst folgern wir daraus, daß eine den Umlaufssinn erhaltende topologische Abbildung der Kugel auf sich mit genau einem singulären Punkt S diesen Punkt S notwendig invariant läßt und außer S keinen anderen invarianten Punkt hat. Die Voraussetzungen meines Satzes betreffend die Charakterisierung der parabolischen Transformationen sind also erfüllt (s. die unter [1]) zitierte Arbeit); wir können den folgenden Satz aussprechen:

II. *Eine topologische Abbildung der Kugel auf sich mit erhaltendem Umlaufssinn, die genau einen singulären Punkt hat, ist einer parabolischen linearen Transformation homöomorph.*

§ 2. Hyperbolische Abbildungen.

1. Sei t eine den Umlaufssinn erhaltende topologische Abbildung der Kugelfläche auf sich, die endlich viele, aber mindestens zwei singuläre Punkte hat. Die singulären Punkte gehen bei t ineinander über, so daß bei einer gewissen Potenz t^{ν} von t jeder von ihnen invariant ist. Da t^{ν} mindestens zwei Fixpunkte hat, muß auch die Abbildung t mindestens zwei Fixpunkte haben.[11]) Nach § 1, 8. 2 kann weder t noch irgend eine Potenz von t einen regulären Punkt fest lassen; *bei t sind also mindestens zwei singuläre Punkte S_1 und S_2 invariant.*

2. *Wenn die Menge $\{P^n\}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ der sukzessiven Bilder eines regulären Punktes P einen regulären Punkt Q zu Häufungspunkt hat, so ist $\{P^n\}$ in sich dicht.*

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig; da Q regulär ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jeden Punkt R, für welchen der Abstand $(R, Q) < \delta$,

---

[11]) nach einem Korollar des Brouwerschen Translationssatzes; vgl. B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie,* S. 199, Satz IV.

$(R^n, Q^n) < \varepsilon$ für jedes n besteht. Da Q ein Häufungspunkt von $\{P^n\}$ ist, gibt es ein P^k, so daß $(P^k, Q) < \delta$, folglich ist der Abstand ihrer bei t^{-k} entstehenden Bilder, d. h. der Abstand der Punkte P und Q^{-k} kleiner als ε. Sei ε_1 der Abstand von P und Q^{-k}, und sei $\varepsilon' < \varepsilon - \varepsilon_1$. Zufolge der Stetigkeit der Abbildung t^{-k} gibt es ein δ', so daß für jeden Punkt R, für welchem $(R, Q) < \delta'$, $(R^{-k}, Q^{-k}) < \varepsilon'$ ist. Es gibt nun mindestens einen von P^k verschiedenen Punkt P^l der Menge $\{P^n\}$, dessen Abstand von Q kleiner als δ' ist, so daß P^{l-k} in der ε'-Umgebung von Q^{-k}, also jedenfalls in der ε-Umgebung von P selbst liegt. Damit ist gezeigt, daß P ein Häufungspunkt von $\{P^n\}$ ist. Aus der Stetigkeit der Abbildung t^r folgt, daß P^r ein Häufungspunkt von $t^r\{P^n\} = \{P^n\}$ ist. Also ist die Menge $\{P^n\}$ in sich dicht.

2. 1 *Wenn der reguläre Punkt P kein Häufungspunkt der Folge $P^1, P^2, \ldots$ ist, so ist P auch kein Häufungspunkt der Folge $P^{-1}, P^{-2}, \ldots$.*

Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $(P^n, P) > \varepsilon$, für jedes $n > 0$. Sei $\delta > 0$ laut der Regularitätsbedingung zur Zahl ε für den Punkt P gewählt. Wäre $P^{-r} (r > 0)$ ein Punkt im Abstand kleiner als δ von P, so wären auch $t^r(P^{-r}) = P$ und $t^r(P) = P^r$ im Abstand $< \varepsilon$ voneinander, gegen Annahme.

3. Wir werden beweisen, daß es *mindestens einen solchen regulären Punkt P gibt, für welchen die Menge $\{P^n\}$ nur singuläre Punkte zu Häufungspunkten hat.*

3. 1 Sei c ein Kreis um den bei t invarianten singulären Punkt S_1 als Mittelpunkt, welcher S_1 von den anderen singulären Punkten trennt. Sein Bild bei t^n ist eine einfache geschlossene Kurve c^n von derselben Eigenschaft. Unter dem Innern von c bzw. von c^n verstehen wir das durch sie bestimmte, den Punkt S_1 enthaltende Gebiet.

3. 11 Wenn c' keinen Punkt im Äußern von c hat, — das werden wir mit dem Zeichen $c' \subset c$ ausdrücken, — so kann c' mit c doch nicht zusammenfallen, laut des Satzes 8. 2 von § 1; es gibt also einen regulären Punkt P von c, der nicht zu c' gehört; seine sukzessiven Bilder $P^1, P^2, \ldots$ liegen sämtlich im Innern von c', oder auf c'; P ist kein Häufungspunkt dieser Folge. Nach 2. 1 und 2 hat die Menge $\{P^n\}$ nur singuläre Punkte zu Häufungs-

punkten, so daß für diesen Fall die Behauptung 3 bewiesen ist. Ebenso erledigt sich der Fall $c \supset c'$.

3.2 Für das Weitere nehmen wir also an, daß jede einfache geschlossene Kurve, die S_1 von den anderen singulären Punkten trennt, ihr Bild *schneidet.* (Mit diesem Wort drücken wir aus, daß jede der beiden Kurven sowohl im Innern, wie auch im Äußern der anderen Kurve mindestens einen Punkt hat.)

Wir konstruieren ein den Punkt S_1 enthaltendes Kontinuum K, welches bei t^{-1} in eine Teilmenge von K übergeht.

Sei wieder c ein Kreis um S_1, welcher S_1 von den anderen singulären Punkten trennt; sei c' sein Bild. Der Rand des von c und c' bestimmten, den Punkt S_1 enthaltenden Gebietes ist eine einfache geschlossene Kurve c_1, welcher mindestens einen zu c gehörigen Punkt besitzt. Das Bild c_1' von c_1 schneidet c_1 und da $c_1 \subset c$, also auch $c_1' \subset c'$, so gehören sämtliche Schnittpunkte von c_1 und c_1' zu c. Der Rand c_2 des von c_1 und c_1' bestimmten, den Punkt S_1 enthaltenden Gebietes hat also mindestens einen Punkt auf c. Sei c_2' das Bild von c_2; wieder ergibt sich, daß c_2 und c_2' sich schneiden, und die Schnittpunkte zu c gehören, usf. Für die auf diese Weise erhaltenen Kurven bestehen die Beziehungen: $c \supset c_1 \supset c_2 \ldots$ und $c' \supset c_1' \supset c_2' \ldots$; ferner $c_{i+1} \subset c_i'$, für jedes i. Jede der Kurven $c_1, c_2, \ldots$ hat mindestens einen Punkt auf c.

Bezeichnen wir mit K (bzw. mit K') die Grenzmenge der von $c, c_1, c_2, \ldots$, (bzw. von $c', c_1', c_2', \ldots$) berandeten inneren Bereiche.[12]) K ist ein Kontinuum, welches den Punkt S_1 und mindestens einen Punkt des Kreises c enthält. Die Restmenge des Kontinuums K auf der Kugel besteht aus einem (einfach zusammenhängenden) Gebiet; jeder zur Restmenge von K gehörige Punkt liegt nämlich, von einem gewissen Index ab, im Äußern der Kurven c_i. K' ist ein Kontinuum, welches den Punkt S enthält und auf der Kugel ein Restgebiet bestimmt. K ist eine Teilmenge von K', da für jedes $i: c_{i+1} \subset c_i'$ besteht. Das Bild von K bei t ist mit K' identisch.

3.21 Wenn K eine echte Teilmenge von K' ist, so sei P ein nicht zu K gehöriger Punkt von K'; seine bei den Potenzen $t^{-1}, t^{-2}, \ldots$ entstehenden Bilder gehören alle zu K, sie können

[12]) K ist übrigens der Durchschnitt der von den sukzessiven Bildern $c, c^1, c^2, \ldots$ berandeten inneren Bereiche; aus der im Text gegebenen Definition erhellt, daß K mindestens einen Punkt auf c besitzt.

also den Punkt P nicht zu Häufungspunkt haben. Nach 2 und 2.1 sind alle Häufungspunkte von $\{P^n\}$ singuläre Punkte; für diesen Fall ist die Behauptung 3 bewiesen.

3.3 Wenn K und K' identisch sind, so zeigen wir zunächst folgendes: *Sei P ein beliebiger Punkt der Kugel; die Menge $\{P^n\}$ kann auf der Kugel nicht überall dicht liegen.* Seien Q und R zwei reguläre Punkte, von denen Q zu K gehört, R nicht. Sei P ein regulärer Punkt, von welchem wir annehmen, daß $\{P^n\}$ auf der Kugel überall dicht liegt. Sei $2\varepsilon > 0$ der Abstand des Punktes R vom Kontinuum K und bezeichne $\delta > 0$ eine laut der Regularitätsbedingung der Zahl ε und dem Punkt Q entsprechende Zahl. Es gibt einen Punkt P^k, für welchen $(P^k, Q) < \delta$; für jedes n ist also $(P^{k+n}, Q^n) < \varepsilon$. Es gibt auch einen Punkt P^l, für welchen $(P^l, R) < \varepsilon$; für dieses l ist auch $(P^l, Q^{l-k}) < \varepsilon$, also $(R, Q^{l-k}) < 2\varepsilon$. Da aber Q^{l-k} wegen der Invarianz von K zu K gehört, widerspricht dies der Wahl von ε.

3.4 *Für jeden regulären Punkt P hat $\{P^n\}$ mindestens einen singulären Punkt zu Häufungspunkt.* Wenn nämlich P ein solcher regulärer Punkt ist, für welchen $\{P^n\}$ keinen singulären Häufungspunkt hat, so läßt sich eine aus regulären Punkten bestehende einfache geschlossene Kurve konstruieren, die bei einer Potenz von t mit erhaltendem Umlaufssinn in sich selbst übergeht. In diesem Fall ist also die Abbildung t überall regulär, laut § 1, 8.2.

Sei $2\varepsilon > 0$ größer als der Abstand der Menge $\{P^n\}$ von den singulären Punkten. Wählen wir $\delta > 0$ laut der Regularität zur Zahl ε für den Punkt P. In der δ-Umgebung von P gibt es einen Punkt P^r (laut 2); in einer noch kleineren Umgebung von P, welche zu ihrem bei t^r entstehenden Bild fremd ist, gibt es ein P^{kr} $(k > 0)$. Konstruieren wir einen durch die Punkte P und P^{kr} laufenden *Translationsbogen* β für die Abbildung t^r [13]) und betrachten wir die bei $t^r, t^{2r}, \ldots$ entstehenden Bilder $\beta^r, \beta^{2r}, \ldots$ desselben. Einer dieser Bogen trifft den Bogen β; sei etwa β^{kr} der erste solche. Beschreiben wir die von den Bogen $\beta, \beta^r, \beta^{2r}, \ldots, \beta^{kr}$ gebildete Kurve bis zum ersten solchen Punkt von β^{kr}, der zu β gehört, und lassen wir den zwischen diesem Punkt und dem Punkt P liegenden Teil des Bogens β fort; so erhalten wir eine einfache geschlossene Kurve c; in jedem der durch c bestimmten Gebieten

---

[13]) vgl. die unter [1]) zitierte Arbeit, S. 230.

gibt es mindestens einen Fixpunkt F_1 und F_2 von t^r.[14]) Betrachten wir das Kurvensystem $\{c, c^r, c^{2r}, \ldots, c^{-r}, c^{-2r}, \ldots\}$; jede Kurve des Systems trennt die Fixpunkte F_1 und F_2 voneinander. Zufolge der Wahl von δ liegen alle Kurven des Systems außerhalb der ε-Umgebungen der singulären Punkte. Das vom System $\{c^{nr}\}$ bestimmte, den Punkt F_1 enthaltende Gebiet wird also von einer aus regulären Punkten bestehenden einfachen geschlossenen Kurve berandet, welche bei t^r mit erhaltendem Umlaufssinn auf sich selbst abgebildet wird.

3. 5 Für die weitere Betrachtung können wir also annehmen, daß für jeden regulären Punkt P die Menge $\{P^n\}$ mindestens einen singulären Häufungspunkt hat. Andererseits zeigt das in 3. 2 konstruierte Kontinuum K, daß es zu jedem singulären Punkt S mindestens einen regulären Punkt P gibt, für welchen die Menge $\{P^n\}$ den Punkt S zu Häufungspunkt hat. Wenn der singuläre Punkt S bei t nicht invariant ist, ist er doch bei einer Potenz t^ν invariant; sei c ein hinreichend kleiner Kreis um S, der keinen anderen singulären Punkt enthält, und bezeichne K das vom System $\{c^{\nu n}\}$ bestimmte, den Punkt S enthaltende Kontinuum, welches bei t^ν invariant ist. Wenn P ein Punkt von K ist, gehört die Menge $\{P^{\nu n}\}$ zu K, sie kann also keinen von S verschiedenen singulären Häufungspunkt haben, und weil sie mindestens einen singulären Häufungspunkt hat, ist dieser notwendig mit S identisch.

Es gibt also entweder einen solchen regulären Punkt P, dessen sukzessive Bilder $\{P^n\}$ mindestens zwei verschiedene singuläre Häufungspunkte S_1 und S_2 haben; oder es gibt einen solchen regulären Punkt P, für welchen die Menge $\{P^n\}$ den Punkt S_1 zu Häufungspunkt hat, während es in beliebiger Nähe von P einen solchen regulären Punkt Q gibt, für welchen die Menge $\{Q^n\}$ einen von S_1 verschiedenen singulären Punkt S_2 zu Häufungspunkt hat. Vorausgesetzt in beiden Fällen, daß $\{P^n\}$ auch reguläre Punkte zu Häufungspunkten hat, gibt es in beliebiger Nähe von P eines von seinen sukzessiven Bildern P^r. Nach 3. 3 ist $\{P^n\}$ auf der Kugel nicht überall dicht; es gibt also einen Punkt R in Abstand $> 2\varepsilon$ (> 0) von der Menge $\{P^n\}$. Wählen

[14]) L. E. J. Brouwer, Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Annalen*, **72** (1912), S. 37—54., vgl. Satz 1. auf S. 38. — Vgl. auch die Fußnote [9]) meiner unter [1]) zitierten Arbeit.

wir $\delta = \varphi(\varepsilon, P)$, laut der Regularitätsbedingung; sei P^r eines von den sukzessiven Bildern von P in der δ-Umgebung von P, und sei Q ein Punkt auch im Abstand $< \delta$ von P, von der Art, daß $\{P^n\}$ den Punkt S_1 und $\{Q^n\}$ den Punkt S_2 zu Häufungspunkt hat. (Falls $\{P^n\}$ beide Punkte S_1 und S_2 zu Häufungspunkten hat, nehmen wir $Q = P$). Verbinden wir die Punkte P, Q und P^r durch einen einfachen Bogen β in der δ-Umgebung von P; betrachten wir die bei $1, t^r, t^{2r}, \ldots; t^{-r}, t^{-2r}, \ldots$ entstehenden Bilder von β. Diese bilden zusammen eine zusammenhängende Menge, deren Ableitung ein bei t^r invariantes Kontinuum $\varkappa$ ist. $\varkappa$ enthält beide Punkte S_1 und S_2; die ε-Umgebung von R ist aber fremd zu $\varkappa$.

Sei G ein durch $\varkappa$ bestimmtes Gebiet. Wenn die sukzessiven Bilder eines in G liegenden regulären Punktes R einen regulären Häufungspunkt haben, geht R bei einer genügend hohen Potenz t^{kr} von t^r (laut 2) in einen sehr nahe bei R, also insbesondere in G liegenden Punkt über, so daß G bei t^{kr} in sich selbst übergeht.

Bilden wir das einfach zusammenhängende Gebiet G auf eine einmal punktierte Kugelfläche topologisch ab. Wir nehmen also eine andere Kugel, von welcher wir einen Punkt S^* fortlassen, und bilden G auf dieselbe ab. Betrachten wir die Abbildung dieser Kugel auf sich, welche der Abbildung t^{kr} von G in sich entspricht. Die in G liegenden singulären Punkte, und keine anderen Punkte von G, gehen in singuläre Punkte der neuen Kugel über; außerdem ist S^* ein weiterer singulärer Punkt. *Die Abbildung der neuen Kugel hat also mindestens um einen singulären Punkt weniger als t.*

Wiederholen wir dieses Verfahren eine endliche Zahl von Malen, bis wir zu einer solchen Abbildung gelangen, die *nur einen singulären Punkt hat.* Diese Abbildung ist dann laut § 1, Satz II einer parabolischen Abbildung homöomorph; die sukzessiven Bilder eines beliebigen regulären Punktes bilden eine solche Menge, die nicht in sich dicht ist.

Zurückkehrend auf die ursprünglich gegebene Kugel und die Abbildung t, stellen wir fest, daß es einen regulären Punkt P und eine Zahl N gibt, so daß die Menge $\{P, P^N, P^{2N}, \ldots, P^{-N}, P^{-2N}, \ldots\}$ *nicht* in sich dicht ist. Nach dem in 2 Bewiesenen folgt daraus, daß diese Menge keinen regulären Häufungspunkt hat, also daß ihre Häufungspunkte sämtlich singuläre Punkte sind. Da die singulären Punkte bei $1, t, t^2, \ldots, t^{N-1}$ ineinander übergehen, so folgt aus der Stetigkeit dieser Abbildungen, daß für jedes $\nu = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, sämtliche Häufungspunkte der Menge $\{P^\nu, P^{\nu+N}, P^{\nu+2N}, \ldots, P^{\nu-N}, P^{\nu-2N}, \ldots\}$ singuläre Punkte sind. Addieren wir diese N Mengen, so erhalten wir die Menge $\{P, P^1, P^2, \ldots, P^{-1}, P^{-2}, \ldots\} = \{P^n\}$, für welche aus dem Obigen folgt, daß ihre Häufungspunkte sämtlich singuläre Punkte sind. Hiermit ist die Behauptung 3 bewiesen.

4. *Setzen wir zunächst voraus, daß für einen regulären Punkt P die sukzessiven Bilder $P^1, P^2, \ldots$ gegen einen einzigen* (singulären und invarianten) *Punkt S konvergieren. Wir zeigen, daß S ein Attraktionspunkt für t ist, m. a. W. daß die sukzessiven Bilder $Q^1, Q^2, \ldots$ irgend eines anderen regulären Punktes Q gegen denselben Punkt S konvergieren.*

Sei $3\varepsilon > 0$ beliebig, aber kleiner als der Abstand (P, S) und auch kleiner als der Abstand von S von den anderen singulären Punkten. Sei $\delta = \varphi(\varepsilon, P)$. Sei Q ein von P um weniger als δ entfernter Punkt. Da die Punkte $P^1, P^2, \ldots$ gegen S konvergieren, und der Abstand (P^n, Q^n) für jedes n kleiner als ε ist, so liegen sämtliche Punkte Q^n von einem gewissen Index ab in der 2ε-Umgebung von S. Wenn die Punkte $Q^1, Q^2, \ldots$ nicht gegen S konvergieren, so haben sie wenigstens einen Häufungspunkt R, der von S um weniger als 2ε entfernt, also ein regulärer Punkt ist. Laut des Satzes 2 wäre also die Menge $\{Q^n\}$ in sich dicht. Weil aber die Folge $Q^1, Q^2, \ldots$ den Punkt Q nicht zu Häufungspunkt hat, so folgt aus 2. 1, daß $\{Q^n\}$ nicht in sich dicht sein kann. Das ist ein Widerspruch.

Damit ist gezeigt, daß die Behauptung des Satzes 4 wenigstens für alle Punkte Q einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes P besteht.

Sei also R ein regulärer Punkt, der Häufungspunkt von solchen regulären Punkten Q ist, für welche die Behauptung 4 bereits bewiesen ist. Würden die sukzessiven Bilder $R^1, R^2, \ldots$ von R nicht gegen S konvergieren, so gäbe es Punkte R^k mit beliebig hohem Index k, deren Abstände von S größer als 2ε sind. Sei $\delta = \varphi(\varepsilon, R)$; laut Voraussetzung gibt es einen Punkt Q im Abstand $< \delta$ von R, dessen sukzessive Bilder gegen S konvergieren, also für genügend hohen Index k: $(Q^k, S) < \varepsilon$. Aus der Regularität von R ergibt sich $(R^k, Q^k) < \varepsilon$ und also $(R^k, S) < 2\varepsilon$, für alle genügend hohe Indizes k, gegen Annahme.

Daraus folgt, daß die Menge derjenigen regulären Punkte Q, deren sukzessive Bilder $Q^1, Q^2, \ldots$ gegen S konvergieren, in der Menge aller regulären Punkte eine offene und zugleich eine abgeschlossene Menge bildet, m. a. W., daß die zwei Mengen identisch sind. Damit ist der Satz 4 bewiesen; darin ist enthalten, daß S *der einzige Attraktionspunkt für* t *ist.*

5. *Sei* P *ein solcher regulärer Punkt, für welchen sämtliche Häufungspunkte der Menge* $\{P^n\}$ *singuläre Punkte sind.* (Nach 3 gibt es mindestens einen solchen Punkt P.) *Die Punkte* $P^1, P^2, \ldots$ *konvergieren gegen einen (singulären) Punkt* S_1; *die Punkte* $P^{-1}, P^{-2}, \ldots$ *konvergieren gegen einen von* S_1 *verschiedenen singulären Punkt* S_2.

Seien $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ die singulären Punkte. Einen solchen unter diesen Punkten, der Häufungspunkt von $P^1, P^2, \ldots$ ist, bezeichnen wir mit S_1. Da die singulären Punkte bei t ineinander übergehen, gibt es einen kleinsten Index k, für welchen $t^k(S_1) = S_1$ ist. Bestimmen wir eine positive Zahl 2ε auf die folgende Weise: erstens sollen die ε-Umgebungen $U_1, U_2, \ldots, U_\nu$ von $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ paarweise fremd sein; zweitens soll das bei t^k entstehende Bild $t^k(U_1)$ von U_1 zu $U_2, U_3, \ldots, U_\nu$ fremd sein (Letzteres ist zufolge der Stetigkeit von t^k in S_1 möglich).

Wenn n hinreichend groß ist, so liegen sämtliche Punkte $P^n, P^{n+1}, P^{n+2}, \ldots$ in den Umgebungen $U_1, U_2, \ldots, U_\nu$. Wenn P^r zu U_1 gehört, so liegt P^{r+k} in $t^k(U_1)$, und da $t^k(U_1)$ zu $U_2, U_3, \ldots, U_\nu$ fremd ist, gehört P^{r+k} sicher nicht zu $U_2, U_3, \ldots, U_\nu$, sondern zu U_1 selbst. Daraus folgt, daß mit P^r alle Punkte $P^{r+k}, P^{r+2k}, \ldots$ zu U_1 gehören, und also gegen S_1 konvergieren. Laut des Satzes 4 ist S_1 ein Attraktionspunkt für t^k.

Wäre aber $k > 1$, so sei etwa $t(S_1) = S_1'$. Die Punkte $P^{r+1}, P^{r+k+1}, P^{r+2k+1}, \ldots$ konvergieren gegen S_1', so daß S_1' ein weiterer Attraktionspunkt für t^k wäre. Das widerspricht dem Satz 4. Daraus folgt, daß $k = 1$, also daß S_1 bei t invariant und laut des Satzes 4 für t ein Attraktionspunkt ist.

Aus dem Bewiesenen folgt gleich, daß die Folge $P^{-1}, P^{-2}, \ldots$ gegen einen singulären Punkt konvergiert.

Nach der zu Anfang 3. 5 gemachten Bemerkung gibt es zu jedem singulären Punkt S_2 mindestens einen solchen regulären

Punkt P, für welchen die Menge $\{P^n\}$ den Punkt S_2 zu Häufungspunkt hat. Da die Punkte $P^1, P^2, \ldots$ gegen S_1 konvergieren, hat also die Menge $P^{-1}, P^{-2}, \ldots$ den Punkt S_2 zu Häufungspunkt, und nach dem obigen Beweis konvergiert sogar die Folge P^{-1}, $P^{-2}, \ldots$ gegen den Punkt S_2. Nach 4 folgt daraus, daß für jeden regulären Punkt Q die Folge $Q^{-1}, Q^{-2}, \ldots$ gegen S_2 konvergiert.

5. 1 Zugleich ergibt sich, daß t *außer* S_1 *und* S_2 *keine anderen singulären Punkte hat.* Für jeden regulären Punkt P ist nämlich die Ableitung der Menge $\{P^n\}$ mit dem Punktpaar (S_1, S_2) identisch.

6. Sei c eine einfache geschlossene Kurve, die die beiden singulären Punkte S_1 und S_2 voneinander trennt. Bezeichne 2ε eine beliebige positive Zahl, die kleiner ist, als der Abstand des Punktes S_1 von der Kurve c.

Ich behaupte, daß es einen Index $n\,(>0)$ gibt, für welchen die Kurve c^n und auch jede Kurve $c^{n+k}\,(k>0)$ ganz in der ε-Umgebung von S_1 verläuft; c und c^n haben dann keinen gemeinsamen Punkt. Wenn P ein beliebiger Punkt von c ist, so gibt es einen kleinsten Index ν, so daß alle Punkte $P^\nu, P^{\nu+1}, \ldots$ in der ε-Umgebung von S_1 liegen. Gäbe es keinen Index n von der Art, daß für jeden Punkt P von c die Punkte $P^n, P^{n+1}, \ldots$ sämtlich in der ε-Umgebung von S_1 liegen, so gibt es eine Folge von Punkten $P_1, P_2, \ldots$ von c, und zugehörige Indizes $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$ von der Art, daß $P_1^{\nu_1}, P_2^{\nu_2}, \ldots$ sämtlich in Abstand $\geqq \varepsilon$ von S_1 liegen. Wir können annehmen, daß sämtliche Punkte $P_k^{\nu_k}$, bis auf endlich viele, von S_1 den Abstand ε haben. Sei nämlich P_0 ein Punkt von c und ν_0 ein solcher Index, daß sämtliche Punkte $P_0^{\nu_0}, P_0^{\nu_0+1}$, $P_0^{\nu_0+2}, \ldots$ zu der ε-Umgebung von S_1 gehören. Von einem gewissen Index k ab ist $\nu_k > \nu_0$; wenn der Abstand $(P_k^{\nu_k}, S_1) > \varepsilon$ ist, so schneidet das bei t^{ν_k} entstehende Bild des Bogens $P_0 P_k$ von c den Kreis $C(S_1, \varepsilon)$; es gibt also auf diesem Bogen von c einen Punkt $\bar{P}_k$, für welchen $(\bar{P}_k^{\nu_k}, S_1) = \varepsilon$ ist; wir ersetzen den Punkt P_k durch diesen Punkt $\bar{P}_k$ und bezeichnen ihn weiterhin mit P_k. Sei P ein Häufungspunkt der Folge $P_1, P_2, \ldots$; laut der Regularität von P läßt sich eine Zahl $\delta > 0$ für den Punkt P zur Zahl $\varepsilon/2$ bestimmen. Bezeichne ν den kleinsten Index, für welchen sämtliche Punkte $P^\nu, P^{\nu+1}, P^{\nu+2}, \ldots$ in der $\varepsilon/2$-Umgebung von S_1 liegen. Sei P_r ein Punkt der obigen Folge, der von P einen Abstand $<\delta$ hat, mit genügend hohem Index r, so daß die zugehörige Zahl $\nu_r > \nu$ sei. Zufolge der Regularität ist dann $(P_r^{\nu_r}, P^{\nu_r}) < \varepsilon/2$; weil ferner $\nu_r > \nu$, so ist $(P^{\nu_r}, S_1) < \varepsilon/2$, also $(P_r^{\nu_r}, S_1) < \varepsilon$, was ein Widerspruch ist.

Daraus folgt, daß *für eine bestimmte Zahl n (>0) die Kurve c^n und auch jede Kurve c^{n+k} ($k>0$) ganz in der ε-Umgebung von S_1 verläuft. Insbesondere konvergieren die Kurven $c^1, c^2, \ldots$ gegen den Punkt S_1.*

7. Unser nächster Zweck ist, *eine solche einfache geschlossene Kurve C* zu konstruieren, *deren bei t entstehendes Bild C^1 ganz im Innern von C liegt.*

7. 1 *Wir konstruieren eine einfache geschlossene Kurve γ, deren bei t entstehendes Bild γ^1 keinen Punkt im Äußern von γ hat.* Sei c eine einfache geschlossene Kurve, die die Punkte S_1 und S_2 voneinander trennt und bezeichne n den kleinsten Index, für welchen die Kurve c^n ganz im Innern von c liegt. Betrachten wir das von den Kurven $(c, c^1, \ldots, c^{n-1})$ bestimmte, den Punkt S_1 enthaltende Gebiet; sein Rand ist eine einfache geschlossene Kurve γ. Das Bild des Innern von γ ist dasjenige von den Kurven $(c^1, c^2, \ldots, c^n)$ bestimmte Gebiet, welches S_1 enthält; dieses ist ein Teilgebiet des Innern von γ, da c^n im Innern von c liegt. Also ist der Rand des von $(c^1, c^2, \ldots, c^n)$ bestimmten den Punkt S_1 enthaltenden Gebietes eine einfache geschlossene Kurve γ^1, die keinen Punkt im Äußern von γ hat. γ^1 ist das Bild von γ bei t.

7. 2 γ und γ^1 können gemeinsame Punkte haben. Sei ν der kleinste Index, für welchen γ^ν und γ keinen gemeinsamen Punkt haben; γ^ν liegt im Innern von γ. Aus der Beziehung $\gamma^1 \subseteq \gamma$ folgt: $\gamma^\nu \subset \gamma^{\nu-1} \subset \ldots \subset \gamma^1 \subset \gamma$. Die gemeinsamen Punkte von γ^1 und γ^ν bilden eine abgeschlossene Menge, die zu γ fremd ist. Wir können also eine endliche Anzahl von paarweise fremden Bögen b von γ^1 bestimmen von der folgenden Beschaffenheit: 1) kein Bogen b hat einen Punkt mit γ gemein; 2) jeder gemeinsame Punkt von γ^1 und γ^ν ist ein innerer Punkt eines Bogens b. Jeden Bogen b ersetzen wir durch einen einfachen Bogen b^*, der sehr nahe bei b verläuft, dieselben Endpunkte wie b hat, und so beschaffen ist, daß 1) b^* ganz im Innern von γ und bis auf Endpunkte ganz im Äußern von γ^1 verläuft, 2) die verschiedenen Bögen b^* zu je zwei fremd sind. Bezeichne β^1 die einfache geschlossene Kurve, die aus γ^1 durch Ersetzen der Bögen b durch die Bögen b^* ent-

steht. Laut Konstruktion bestehen dann die folgenden Beziehungen:

$$\gamma^1 \subset \beta^1 \subset \gamma; \quad \beta^1 \times \gamma^\nu = 0\ ^{15)}; \quad \beta^1 \times \gamma = \gamma^1 \times \gamma.$$

Bezeichne β^r das bei t^{r-1} entstehende Bild von β^1; aus den obigen Beziehungen folgt unmittelbar:

$$\beta^{\nu-1} \subset \gamma^{\nu-2} \subset \gamma \subset \beta; \quad \beta^{\nu-1} \times \gamma^{\nu-2} = \gamma^{\nu-1} \times \gamma^{\nu-2}.$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} \beta \times \beta^{\nu-1} &= \beta \times \gamma^{\nu-2} \times \beta^{\nu-1}, \text{ weil } \beta^{\nu-1} \subset \gamma^{\nu-2} \subset \beta; \\ &= \beta \times \gamma^{\nu-2} \times \gamma^{\nu-1}, \text{ weil } \gamma^{\nu-2} \times \beta^{\nu-1} = \gamma^{\nu-2} \times \gamma^{\nu-1}; \\ &= \beta \times \gamma^{\nu-1} = 0, \quad \text{weil } \beta^1 \times \gamma^\nu = 0. \end{aligned}$$

Auf diese Weise haben wir eine einfache geschlossene Kurve β erhalten, für welche $\beta^1 \subset \beta$ und $\beta^{\nu-1} \times \beta = 0$ besteht. Indem wir das Verfahren, durch welches wir aus der Kurve γ die Kurve β konstruiert haben, wiederholt (höchstens $\nu - 1$-mal) anwenden, erhalten wir schließlich eine Kurve C, für welche $C^1 \subset C$, und $C^1 \times C = 0$ ist.

8. Die sukzessiven Bilder $C^0, C^1, C^2, \ldots$ von $C = C^0$ konvergieren gegen S_1; die invers sukzessiven Bilder $C^{-1}, C^{-2}, \ldots$ gegen S_2.

Bilden wir die Kurven C^n topologisch auf die Kreislinien $|z| = 2^n$ der komplexen z-Ebene ab, so daß für jeden Punkt P von c alle Punkte der Menge $\{P^n\}$ in Punkte von gleichem Arcus übergehen. Ergänzen wir die Abbildungen von C und C^1 für ihr Zwischengebiet topologisch; sei P ein beliebiger zwischen C und C^1 liegender Punkt, z der ihm entsprechende Punkt in der z-Ebene; dem Punkt P^n ordnen wir dann den Punkt $2^n z$ der z-Ebene zu.

Mittels dieser topologischen Abbildung der Kugel auf die z-Ebene erweist sich die gegebene Abbildung t der Kugel auf sich als der Ähnlichkeitstransformation $z' = 2z$ homöomorph. Das Resultat dieses Paragraphen fassen wir im folgenden Satz zusammen:

III. *Eine topologische Abbildung der Kugel auf sich mit erhaltendem Umlaufssinn, die nur endlich viele, aber mindestens zwei singuläre Punkte hat, ist einer hyperbolischen linearen Transformation homöomorph.*

Szeged, 12. Januar 1934.

(Eingegangen am 14. Januar 1934.)

---

[15]) $A \times B$ bezeichne, wie üblich, die Menge der gemeinsamen Punkte der Mengen A und B.